Solution de Série TD1

Exercice 1

Conversion Décimal-Binaire :

$(9)_{10} = (1001)_2$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
9 & 2 & & & \\
1 & 4 & 2 & & \\
 & 0 & 2 & 2 & \\
 & & 0 & 1 & 2 \\
 & & & 1 & \boxed{0}
\end{array}$$

$(64)_{10} = (1000000)_2$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c}
64 & 2 & & & & & & \\
0 & 32 & 2 & & & & & \\
 & 0 & 16 & 2 & & & & \\
 & & 0 & 8 & 2 & & & \\
 & & & 0 & 4 & 2 & & \\
 & & & & 0 & 2 & 2 & \\
 & & & & & 0 & 1 & 2 \\
 & & & & & & 1 & \boxed{0}
\end{array}$$

$(13,75)_{10} = (1101,11)_2$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
13 & 2 & & & \\
1 & 6 & 2 & & \\
 & 0 & 3 & 2 & \\
 & & 1 & 1 & 2 \\
 & & & 1 & \boxed{0}
\end{array}$$

$0,75 \times 2 = 1,50$
$0,50 \times 2 = 1,\boxed{00}$

$(29,625)_{10} = (11101,101)_2$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
29 & 2 & & & & \\
1 & 14 & 2 & & & \\
 & 0 & 7 & 2 & & \\
 & & 1 & 3 & 2 & \\
 & & & 1 & 1 & 2 \\
 & & & & 1 & \boxed{0}
\end{array}$$

$0,625 \times 2 = 1,250$
$0,250 \times 2 = 0,500$
$0,500 \times 2 = 1,\boxed{000}$

$(4,6)_{10} = (100,1001\ldots)_2$

$$\begin{array}{c|c|c|c}
4 & 2 & & \\
0 & 2 & 2 & \\
 & 0 & 1 & 2 \\
 & & 1 & \boxed{0}
\end{array}$$

$0,6 \times 2 = 1,2$
$0,2 \times 2 = 0,4$
$0,4 \times 2 = 0,8$
$0,8 \times 2 = 1,6$
$0,6 \times 2 = 1,2$

Conversion Binaire-Décimal :

$$\begin{aligned}(10)_2 &= 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 0\\ &= \boxed{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1011)_2 &= 2^3 \cdot 1 + 2^2 \cdot 0 + 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 1\\ &= 8 + 2 + 1\\ &= \boxed{11}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(101101)_2 &= 2^5 \cdot 1 + 2^4 \cdot 0 + 2^3 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1 + 2^1 \cdot 0 + 2^0 \cdot 1\\ &= 32 + 8 + 4 + 1\\ &= \boxed{45}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(0001110)_2 &= 2^3 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1 + 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 0\\ &= 8 + 4 + 2\\ &= \boxed{14}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(110001,11)_2 &= 2^5 \cdot 1 + 2^4 \cdot 1 + 2^3 \cdot 0 + 2^2 \cdot 0 + 2^1 \cdot 0 + 2^0 \cdot 1 + 2^{-1} \cdot 1 + 2^{-2} \cdot 1\\ &= 32 + 16 + 1 + 1/2 + 1/4\\ &= \boxed{49,75}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1101,101)_2 &= 2^3 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1 + 2^1 \cdot 0 + 2^0 \cdot 1 + 2^{-1} \cdot 1 + 2^{-2} \cdot 0 + 2^{-3} \cdot 1\\ &= 8 + 4 + 1 + 1/2 + 1/8\\ &= \boxed{13,625}\end{aligned}$$

Conversion Décimal-Octal :

$(18)_{10} = (22)_8$

$$\begin{array}{r|l}
18 & 8 \\ \hline
2 & \begin{array}{r|l} 2 & 8 \\ \hline 2 & \boxed{0} \end{array}
\end{array}$$

$(65,25)_{10} = (101,2)_8$

$$\begin{array}{r|l}
65 & 8 \\ \hline
1 & \begin{array}{r|l} 8 & 8 \\ \hline 0 & \begin{array}{r|l} 1 & 8 \\ \hline 1 & \boxed{0} \end{array} \end{array}
\end{array}$$

$0,25 \times 8 = 2, \boxed{00}$

$(7)_{10} = (7)_8$

$$\begin{array}{r|l}
7 & 8 \\ \hline
7 & \boxed{0}
\end{array}$$

$(30,125)_{10} = (36,1)_8$

$$\begin{array}{r|l}
30 & 8 \\ \hline
6 & \begin{array}{r|l} 3 & 8 \\ \hline 3 & \boxed{0} \end{array}
\end{array}$$

$0,125 \times 8 = 1, \boxed{000}$

Conversion Octal-Décimal :

$$\begin{aligned}
(14)_8 &= 8^1 \cdot 1 + 8^0 \cdot 4 \\
&= 8 + 4 \\
&= \boxed{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(101)_8 &= 8^2 \cdot 1 + 8^1 \cdot 0 + 8^0 \cdot 1 \\
&= 64 + 1 \\
&= \boxed{65}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(52)_8 &= 8^1 \cdot 5 + 8^0 \cdot 2 \\
&= 40 + 2 \\
&= \boxed{42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(7,05)_8 &= 8^0 \cdot 7 + 8^{-1} \cdot 0 + 8^{-2} \cdot 5 \\
&= \boxed{7 + 5/64}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(200,13)_8 &= 8^2 \cdot 2 + 8^1 \cdot 0 + 8^0 \cdot 0 + 8^{-1} \cdot 1 + 8^{-2} \cdot 3 \\
&= 128 + 1/8 + 3/64 \\
&= \boxed{128 + 11/64}
\end{aligned}$$

Conversion Décimal-Hexadécimale :

$(9)_{10} = (9)_{16}$

$$\begin{array}{c|c} 9 & 16 \\ \cline{2-2} 9 & \boxed{0} \end{array}$$

$(12)_{10} = (C)_{16}$

$$\begin{array}{c|c} 12 & 16 \\ \cline{2-2} 12 & \boxed{0} \end{array}$$

$(29)_{10} = (1D)_{16}$

$$\begin{array}{c|c|c} 29 & 16 & \\ \cline{2-2} 13 & 1 & 16 \\ \cline{3-3} & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$(160,25)_{10} = (A0,4)_{16}$

$$\begin{array}{c|c|c} 160 & 16 & \\ \cline{2-2} 0 & 10 & 16 \\ \cline{3-3} & 10 & \boxed{0} \end{array}$$

$0,25 \times 16 = 4, \boxed{00}$

$(31,75)_{10} = (1F,C)_{16}$

$$\begin{array}{c|c|c} 31 & 16 & \\ \cline{2-2} 15 & 1 & 16 \\ \cline{3-3} & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$0,75 \times 16 = 12, \boxed{00}$

Conversion Hexadécimale-Décimal :

$$\begin{aligned} (8)_{16} &= 16^0 \cdot 8 \\ &= \boxed{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (AA)_{16} &= 16^1 \cdot 10 + 16^0 \cdot 10 \\ &= 160 + 10 \\ &= \boxed{170} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2E)_{16} &= 16^1 \cdot 2 + 16^0 \cdot 14 \\ &= 32 + 14 \\ &= \boxed{46} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1F,E)_{16} &= 16^1 \cdot 1 + 16^0 \cdot 15 + 16^{-1} \cdot 14 \\ &= 16 + 15 + 14/16 \\ &= \boxed{31 + 7/8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A0,8)_{16} &= 16^1 \cdot 10 + 16^0 \cdot 0 + 16^{-1} \cdot 8 \\ &= 160 + 8/16 \\ &= \boxed{160,5} \end{aligned}$$

Exercice 2

Conversion Octal ↔ Binaire ↔ Hexadécimal :

$(23)_8 = (\underline{010}\,\underline{011})_2$
$(1F)_{16} = (\underline{0001}\,\underline{1111})_2$
$(705)_8 = (000\underline{1'11}\,\underline{00'0}\,\underline{101})_2 = (1C5)_{16}$
$(143,6)_8 = (\underline{001}\,\underline{100}\,\underline{011},\underline{110})_2$
$(A2,AF)_{16} = (\underline{1010}\,\underline{0010},\underline{1010}\,\underline{1111})_2$
$(65,13)_8 = (00\underline{11'0}\,\underline{101},\underline{001}\,\underline{0'1100})_2 = (35,2C)_{16}$

$(\underline{110}\,\underline{100})_2 = (64)_8$
$(\underline{0001}\,\underline{0100}\,\underline{1110})_2 = (14E)_{16}$
$(4D)_{16} = (0\underline{01'00}\,\underline{1'101})_2 = (115)_8$
$(\underline{011}\,\underline{001}\,\underline{111}\,\underline{001},\underline{111}\,\underline{011}\,\underline{010}\,\underline{100})_2 = (3171,7324)_8$
$(\underline{0111},\underline{1110}\,\underline{1001}\,\underline{1101}\,\underline{1100})_2 = (7,E9DC)_{16}$
$(2D,FFC)_{16} = (\underline{0010}\,\underline{1'101},\underline{111'1}\,\underline{11'11}\,\underline{1'100})_2 = (55,7774)_8$

Correspondence chiffre octal-binaire

Octal	Binaire
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Correspondence chiffre hexadécimal-binaire

Hexadécimal	Binaire
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Exercice 3

1. La question pour quels sont les nombres qui ont la même représentation dans toutes les bases, c'est les nombre 0 et 1, donc :

$(0)_2 = (0)_3 = (0)_4 = (0)_5 = (0)_6 = \dots$ et $(1)_2 = (1)_3 = (1)_4 = (1)_5 = (1)_6 = \dots$

2. La question sur quels sont les mots qui ont une signification dans le format hexadécimal (en sachant que dans l'hexadécimal seulement A,B,C,D,E,F sont des chiffres) :

FFFF, ~~CACEH~~, BAC, ~~ROUE~~, ABCD.

3. La question est sur quels sont les chiffres utilisés dans une base b :

chiffres $\in \{0, 1, \dots, b-1\}$

4. La resolution de l'équation : $(17)_{16} = (113)_x$
en appliquant le développement polynomial on a :

$(17)_{16} = 16^1 \cdot 1 + 16^0 \cdot 7 = 16 + 7 = 23$

et :

$(113)_x = x^2 \cdot 1 + x^1 \cdot 1 + x^0 \cdot 3 = x^2 + x + 3$

donc :

$23 = x^2 + x + 3 \Leftrightarrow \boxed{x^2 + x - 20 = 0}$

la résolution de l'équation en second degré donne :

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -20 = 81$

ainsi :

$S_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-1+9}{2} = \boxed{4}$

$S_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-1-9}{2} = \boxed{\xcancel{-5}}$

la base $x = 4$, et ne peut pas être -5 puisque c'est un nombre négatif.

Exercice 4

La détermination des couples de chiffres (x, y) de telle sorte que $(xy)_7 = (yx)_{10}$
en appliquant le développement polynomial on aurait :

$(xy)_7 = 7^1 \cdot x + 7^0 \cdot y = 7x + y$

et :

$(yx)_{10} = 10^1 \cdot y + 10^0 \cdot x = 10y + x$

donc :

$7x + y = 10y + x \Leftrightarrow \boxed{6x = 9y}$

Deux conditions nécessaires pour trouver les chiffres x et y :

1. il doivent être des entiers, étant des chiffres.
2. et inférieurs à 7, parce que 7 est la base minimale pour écrire les chiffres.

On remplace y par les valeurs $0, 1, \dots, 6$ et on retient le couple si x satisfait les 2 conditions
On aurait :

x	y
0	0
3	2
6	4

Exercice 5

1.

$(11)_2 = 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 1 = (3)_{10}$
$(111)_2 = 2^2 \cdot 1 + 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 1 = (7)_{10}$
$(1111)_2 = 2^3 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1 + 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 1 = (15)_{10}$
la formule générale est :
$(\underbrace{1111\ldots1}_{\text{n}})_2 = \boxed{2^n - 1}$

$(10)_2 = 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 0 = (2)_{10}$
$(100)_2 = 2^2 \cdot 1 + 2^1 \cdot 0 + 2^0 \cdot 0 = (4)_{10}$
$(1000)_2 = 2^3 \cdot 1 + 2^2 \cdot 0 + 2^1 \cdot 0 + 2^0 \cdot 0 = (8)_{10}$
la formule générale est :
$(1\,\underbrace{000\ldots0}_{\text{n}})_2 = \boxed{2^n}$

2. ainsi :

$$\begin{aligned}(111\,011)_2 &= (111\,111)_2 - (100)_2 \\ &= (2^6 - 1) - 2^2 \\ &= (64 - 1) - 4 \\ &= \boxed{59}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(11\,110\,110\,111)_2 &= (11\,111\,111\,111)_2 - (1\,000\,000)_2 - (1\,000)_2 \\ &= (2^{11} - 1) - 2^6 - 2^3 \\ &= (2048 - 1) - 64 - 8 \\ &= \boxed{1975}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1\,111\,110\,110\,110)_2 &= (2^{13} - 1) - 2^6 - 2^3 - 1 \\ &= (8192 - 1) - 64 - 8 - 1 \\ &= \boxed{8118}\end{aligned}$$